doi:10.20396/revpibic2620181394

XXVI Congresso de Iniciação Científica Unicamp

17 a 19 de outubro Campinas | Brasil

Teorema da Esfera de Reeb

Ygor Arthur C. De Jesus*, Rafael de Freitas Leão.

Resumo

Nestes trabalho apresentaremos as técnicas de Teoria de Morse que nos permitem demonstrar o teorema da esfera de Reeb. Este teorema garante que se uma variedade possuir uma função com apenas dois pontos críticos não degenerados então a variedade é necessariamente homeomorfa a uma esfera tendo várias aplicações em topologia diferencial como a existência de Esferas Exóticas.

Palavras-chave:

Teoria de Morse, Esferas, Topologia Diferencial

Introdução

O objetivo deste trabalho é compreender funções reais suaves da forma f: M → R definidas em uma variedade suave M com uma condição sobre seus pontos críticos. Tais funções são chamadas de funções de Morse. Investigar o que ocorre com a topologia dos conjuntos $M_a = \{x \in M: f(x) \leq a\}$ quando variamos a. Observamos então que essa mudança na topologia está relacionada com a operação de colar células e o Teorema de Reeb segue de forma natural.

Resultados e Discussão

Lema 1 (Lema de Morse). Seja f: M → R suave e p um ponto crítico não degenerado de f, então existe uma carta (U,φ) de M centrada em p com funções coordenadas (y_i) tal que f nessa carta tem a forma

$$f = f(p) - (y_1)^2 - \dots - (y_k)^2+(y_{k+1})^2+\dots+(y_n)^2,$$

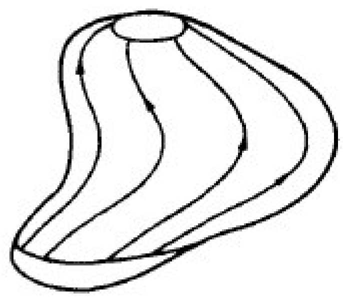
onde k é o índice de p.

Teorema 1. Seja f: M → R uma função suave, a <b e denote por $A = f^{-1}[a,b]$. Suponha que A é um conjunto compacto e não possui nenhum ponto crítico de f. Então existe $F: M_a \to M_b$ difeomorfismo. Além disso M_a é retrato de deformação de M_b.

Teorema 2. Seja f: M → R uma função suave e p um ponto crítico não degenerado de índice k. Seja f(p) = c e suponha que existe ε* > 0 tal que $f^{-1}[c-\varepsilon^*, c+\varepsilon^*]$ é compacto e não possui pontos críticos de f exceto p. Então para ε >0 suficientemente pequeno o conjunto $M_{c+\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotpia do conjunto $M_{c-\varepsilon}$ colado com uma k-célula.

Lema 2. Se f: M → R uma função suave, então f tem pelo menos dois pontos críticos, sendo um de máximo e um de mínimo.

Teorema da Esfera de Reeb. Seja M uma variedade suave compacta de dimensão n tal que existe uma função de morse f com exatamente dois pontos críticos, então M é homeomorfa a $\mathbf{S}^n$.



Conclusão

Com esse trabalho concluímos um critério suficiente para decidir se uma variedade suave de dimensão n é uma esfera(topológicamente), isto é, se conseguirmos definir uma função de Morse com exatamente dois pontos críticos em uma variedade suave e compacta M, concluímos que esta é topologicamente uma esfera de mesma dimensão.

Agradecimentos

Aqui deixo minha enorme gratidão ao meu orientador, não só pela paciência para com as minhas dúvidas, mas também por ter me desafiado com este projeto que teve grande importância para o meu amadurecimento matemático e desenvolvimento criativo.

Agradeço a todos os meus professores que contribuíram para a formação necessária para a realização deste projeto.

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio incondicional.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

[1] John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds. Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] John M. Lee, Introduction to Topological Manifolds. Springer-Verlag, New York, 2010.

[3] John W. Milnor. Morse Theory. Princeton University Press, Princeton, 1963.

[4] John W. Milnor. Topology from the Differentiable Viewpoint. Princeton University Press, Princeton, 1965.